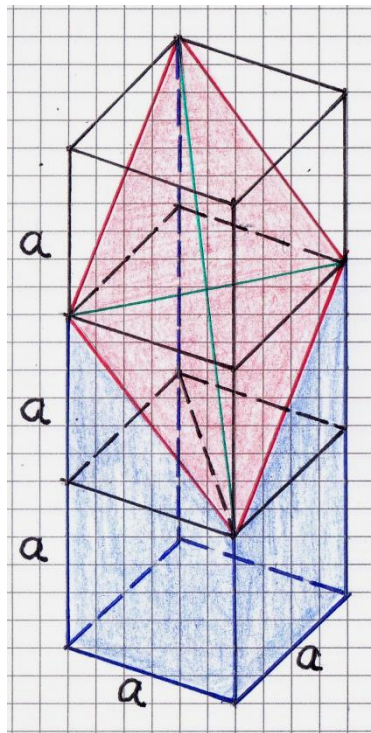


Egy hasáb csonkolásánál fellépő felszín - és térfogatváltozás meghatározása

A feladat

Egy három kockából összetettnek képzelt négyzet alapú egyenes hasábot speciális helyzetű metszősíkkal csonkolunk, az 1. ábra szerint.



1. ábra

Határozzuk meg a csonkolás miatt előálló felszín - és térfogatváltozás százalékos nagyságát!

A megoldás

Az ép test teljes felszíne:

$$A_{\text{ép}} = T_{\text{alap}} + T_{\text{fedő}} + T_{\text{palást,ép}} = a^2 + a^2 + 12 \cdot a^2 = 14 \cdot a^2, \text{ tehát:}$$

$$A_{\text{ép}} = 14 \cdot a^2. \quad (1)$$

A csonkolt test teljes felszíne:

$$\begin{aligned} A_{\text{csonkolt}} &= T_{\text{alap}} + T_{\text{palást,csonk}} + T_{\text{metszet}} = \\ &= a^2 + \left(4 \cdot a^2 + 2 \cdot \frac{a^2}{2} + 2 \cdot a^2 + 2 \cdot \frac{a^2}{2} \right) + T_{\text{metszet}} = 9 \cdot a^2 + T_{\text{metszet}}, \text{ tehát:} \end{aligned}$$

$$A_{csonkolt} = 9 \cdot a^2 + T_{metszet} . \quad (2)$$

A rombusz alakú metszet területe:

$$T_{metszet} = \frac{T_{alap}}{\cos \varphi} = \frac{a^2}{\cos \varphi} , \quad (3)$$

ahol φ az alapsík és a metszősík közbezárt szöge. Erre az 1. ábra alapján:

$$\cos \varphi = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{(a \cdot \sqrt{2})^2 + (2 \cdot a)^2}} = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2 \cdot a^2 + 4 \cdot a^2}} = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{6 \cdot a^2}} = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{a \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} , \text{ tehát:}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} ; \quad (4)$$

most (3) és (4) - gyel:

$$T_{metszet} = \frac{a^2}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \cdot a^2 , \text{ tehát:}$$

$$T_{metszet} = \sqrt{3} \cdot a^2 . \quad (5)$$

Majd (2) és (5) - tel:

$$A_{csonkolt} = 9 \cdot a^2 + \sqrt{3} \cdot a^2 = (9 + \sqrt{3}) \cdot a^2 , \text{ tehát:}$$

$$A_{csonkolt} = (9 + \sqrt{3}) \cdot a^2 . \quad (6)$$

A csonkolás miatti felszínváltozás nagysága:

$$\Delta A = A_{ép} - A_{csonkolt} ; \quad (7)$$

ezután (1), (6) és (7) - tel:

$$\Delta A = 14 \cdot a^2 - (9 + \sqrt{3}) \cdot a^2 = (5 - \sqrt{3}) \cdot a^2 ; \quad (9)$$

a felszínváltozás százalékos értéke:

$$\delta A = \frac{\Delta A}{A_{ép}} \cdot 100 (\%) ; \quad (10)$$

most (1), (9) és (10) - zel:

$$\delta A = \frac{(5 - \sqrt{3}) \cdot a^2}{14 \cdot a^2} \cdot 100 (\%) = \frac{5 - \sqrt{3}}{14} \cdot 100 (\%) \approx 23,34 \% , \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{\delta A \approx 23,34 \% .}} \quad (11)$$

Folytatjuk a térfogatokkal.

Az ép test térfogata:

$$V_{\text{ép}} = 3 \cdot a^3 . \quad (12)$$

A csonkolás során eltávolított rész térfogata az 1. ábráról leolvashatóan éppen egy kocká - nyi, azaz a térfogatváltozás nagysága:

$$\Delta V = a^3 . \quad (13)$$

A térfogatváltozás százalékos értéke:

$$\delta V = \frac{\Delta V}{V_{\text{ép}}} \cdot 100 (\%) . \quad (14)$$

Most (12), (13) és (14) - gyel:

$$\delta V = \frac{a^3}{3 \cdot a^3} \cdot 100 (\%) = \frac{100}{3} (\%) \approx 33,33 \% , \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{\delta V \approx 33,33 \% .}} \quad (15)$$

Szöveges válasz:

Tehát a fenti hasáb csonkolása során:

~ a felszínváltozás 23,34 % ,

~ a térfogatváltozás pedig 33,33 % .

Megjegyzések:

M1. Javasoljuk, hogy az Olvasó számítsa ki a metszeti síkidom területét más módon is!

M2. Kiegészítés (13) - hoz: ha az 1. ábrán a felső gúlát a vízszintes (zöld) négyzet - átló mint tengely körül leforgatjuk, akkor az a második csonkolt kockát éppen egy teljes koc - kává egészíti ki; vagyis olyan a helyzet, mintha a felső kocka eltűnne: a csonkolás során fellépő térfogatváltozás éppen egy kockatérfogatnyi.

M3. Ennek a középiskolai geometriai - számtani feladatnak akár szakmai jelentősége is lehet. Például: az ép hasáb alakú test egy *fatest*, melynek felületi kezeléséről van szó. Ez akár gomba - és rovarölő szerrel való kezelés, akár mázolás / lakkozás is lehet. Ennek **M** anyagigénye, **K** költségigénye arányosnak vehető a kezelt felszínnel:

$$M = k_1 \cdot A_{\text{kezelt}} , K = k_2 \cdot M = k_2 \cdot k_1 \cdot A = k \cdot A_{\text{kezelt}} . \quad (16)$$

Ipari méretű – másképpen: tömeges előregyártás jellegű – termelés során akár indokoltta is válhat egy a fentiekhez hasonló számítás elvégzése, a megmunkált elemekre.

Faanyag esetében még az is szempont lehet, hogy az előkezelt anyag helyszíni megmunkálása során ismét szabad, a levegővel érintkező metszeti felületek állhatnak elő, melyek gombatámadási felületként akár igen jelentős nagyságúak is lehetnek, ezért ezek utólagos kezelést igényelhetnek.

M4. Nem kizárt, hogy az 1. ábra szerintihez hasonló test akár komolyabb építészeti jelentőséggel is bírhat. Egy (japán) animében láttuk a 2. ábra szerinti tornyot, mely ott egy iskolaépület része. Valójában erről jutott eszünkbe ez a feladat.



2. ábra – forrása: [1]

Forrás:

[1] – <https://link-univerzum.gportal.hu/gindex.php?pg=37228586>

Összeállította: **Galgóczi Gyula**

Sződliget, 2018. 12. 11.